Ⅳ 삼각비

1. 삼각비

고층 건물의 높이, 멀리 떨어진 지점의 거리 등 우리 생활 주변에서 직접 측정하기 어려운 높이나 길이는 삼각형의 변과 내각 사이의 관계를 이용하여 구할 수 있다. 삼각비는 직각삼각형에서 두 변의 길이의 비로써 천문, 항해, 측량 등 다양한 분야에서 문제를 해결하는 데 기초가 된다.

배운 내용

– 삼각형의 성질, 피타고라스 정리, 사각형의 성질, 도형의 닮음(중2)

이 단원에서는

Ⅳ–1 삼각비
삼각비의 활용

배울 내용

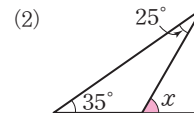
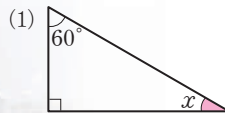
– 삼각함수(수학 Ⅰ)

| 준비 학습 |

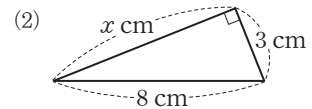
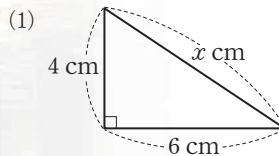
1 다음 삼각형에서 $\angle x$의 크기를 구하시오. 중1

(1)

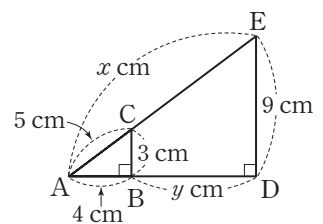
(2)

25°
35°
x

2 다음 직각삼각형에서 x의 값을 구하시오. 중2

(1)

(2)

3 오른쪽 그림의 삼각형에 대하여 다음을 구하시오. 중2

(1) $\triangle$ABC와 $\triangle$ADE의 닮음비

(2) x, y의 값

대단원 포트폴리오

이 단원을 학습하면서 다음 중에서 하나를 선택하여 작성해 보자.

- ☐ 수학 달력
- ☐ 수학 게임
- ☐ 수학 포스터
- ☐ 수학 만화
- ☐ 수학사 보고서
- ☐ 수학 비주얼 싱킹

● 포트폴리오 예시와 길잡이 ▶ 226쪽

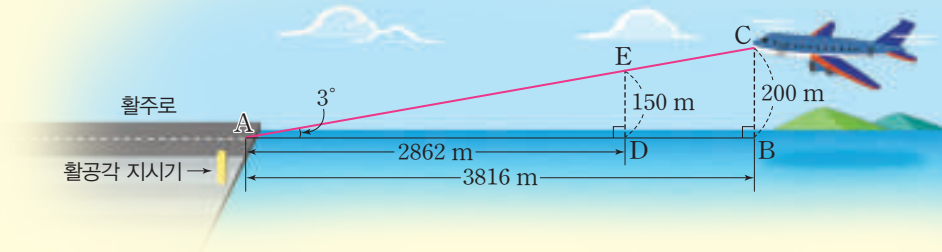
1

삼각비

수학 + 항공

어두운 밤이나 안개가 자욱한 날과 같이 활주로가 잘 보이지 않을 때 항공기가 안전하게 착륙할 수 있도록 유도하는 다양한 계기 착륙 장치가 있다. 이 장치 중에서 활공각 지시기는 항공기가 안전하게 착륙할 수 있는 진입 각도를 항공기에 설치된 전파 수신기에 보내는데, 이때 가장 안정적인 착륙 각도는 3°라고 한다.

(참고 자료: 인천국제공항공사, 2017. 6. 21.)

단원 활동 항공기의 착륙 각도와 고도, 비행 거리를 이용하여 삼각형의 각에 대한 변의 길이의 비를 알아보자.

활동 1 위의 그림과 같이 항공기가 착륙 각도 $3°$를 유지하며 고도 200 m에서 하강하기 시작하였다. 하강하기 시작한 지점 C에서부터 착륙 지점 A까지 항공기의 비행 거리 $\overline{AC}$를 구해 보자.
(단, 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한다.)

활동 2 위의 그림의 $\triangle ABC$와 $\triangle ADE$에서 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$의 값을 각각 소수로 나타내고, 두 값을 비교해 보자. (단, 소수점 아래 다섯째 자리에서 반올림한다.)

위의 활동으로 **알게 된 것**과 **나의 학습 계획**을 적어 보자.

알게 된 것
- ▶ 피타고라스 정리를 이용하여 비행 거리를 구할 수 있다. 예 ☐ 아니요 ☐
- ▶ 각의 크기가 일정할 때 $\dfrac{(\text{높이})}{(\text{밑변의 길이})}$의 값이 일정함을 알 수 있다. 예 ☐ 아니요 ☐

학습할 내용 ▶ 삼각비 ▶ 삼각비의 활용

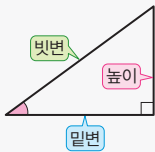
학습 계획

학습 계획안 예시
- 예습과 복습을 열심히 하겠다.
- 수업 시간에 집중하겠다.
- 수학에 대한 자신감을 키우겠다.
- 모둠 활동에 적극적으로 참여하겠다.

삼각비

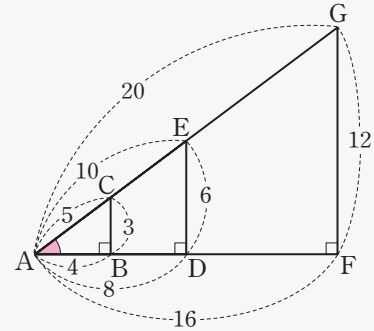
• 삼각비의 뜻을 알고, 간단한 삼각비의 값을 구할 수 있다.

삼각비는 무엇일까?

개 념 열 기

오른쪽 그림은 ∠A를 공통으로 하는 세 직각삼각형 ABC, ADE, AFG를 그린 것이다.

1 세 직각삼각형 ABC, ADE, AFG가 각각 서로 닮음인지 확인하시오.

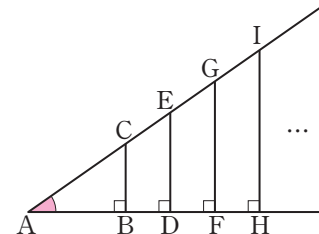
2 다음 표의 빈칸을 알맞게 채우시오.

	△ABC	△ADE	△AFG
① $\dfrac{(\text{높이})}{(\text{빗변의 길이})}$	$\dfrac{3}{5}$		
② $\dfrac{(\text{밑변의 길이})}{(\text{빗변의 길이})}$	$\dfrac{4}{5}$		
③ $\dfrac{(\text{높이})}{(\text{밑변의 길이})}$	$\dfrac{3}{4}$		

3 2에서 ①, ②, ③의 값이 각각 일정함을 확인하시오.

위의 개념 열기에서 세 직각삼각형 ABC, ADE, AFG는 두 쌍의 대응각의 크기가 각각 같으므로 서로 닮은 도형이다.

따라서 세 직각삼각형 ABC, ADE, AFG에서 대응변의 길이의 비가 일정하므로 다음이 성립한다.

$$\frac{(\text{높이})}{(\text{빗변의 길이})}=\frac{3}{5},\quad \frac{(\text{밑변의 길이})}{(\text{빗변의 길이})}=\frac{4}{5},\quad \frac{(\text{높이})}{(\text{밑변의 길이})}=\frac{3}{4}$$

일반적으로 오른쪽 그림과 같이 ∠A의 크기가 같은 직각삼각형 ABC, ADE, AFG, AHI, …는 모두 서로 닮은 도형이다.

따라서 각 직각삼각형에서 다음이 성립한다.

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{ED}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{GF}}{\overline{AG}}=\frac{\overline{IH}}{\overline{AI}}=\cdots \quad \leftarrow \frac{(\text{높이})}{(\text{빗변의 길이})}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{EA}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{GA}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{IA}}=\cdots \quad \leftarrow \frac{(\text{밑변의 길이})}{(\text{빗변의 길이})}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{FG}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{HI}}{\overline{AH}}=\cdots \quad \leftarrow \frac{(\text{높이})}{(\text{밑변의 길이})}$$

이와 같이 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle A$의 크기가 정해지면 삼각형의 크기에 관계없이 $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}, \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}, \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$의 값은 각각 일정하다.

이때 $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$를 $\angle A$의 **사인**이라 하고, 기호로

sin A

와 같이 나타낸다.

또 $\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}$를 $\angle A$의 **코사인**이라 하고, 기호로

cos A

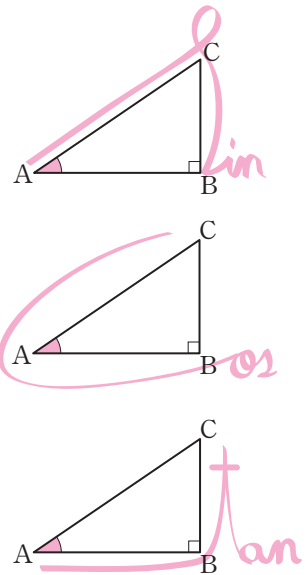
와 같이 나타낸다.

그리고 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$를 $\angle A$의 **탄젠트**라 하고, 기호로

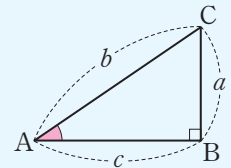
tan A

와 같이 나타낸다.

위의 sin A, cos A, tan A를 통틀어 $\angle A$의 **삼각비**라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각비

$\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$의 대변의 길이를 각각 a, b, c라고 하면

$$\sin A=\frac{a}{b}, \quad \cos A=\frac{c}{b}, \quad \tan A=\frac{a}{c}$$

참고 (1) sin, cos, tan는 각각 sine, cosine, tangent를 줄여서 쓴 것이다.
(2) sin A, cos A, tan A에서 A는 $\angle A$의 크기를 나타낸 것이다.

● 스스로 확인하기 ●

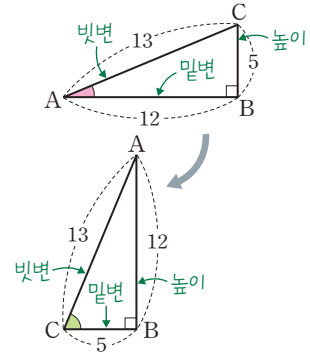
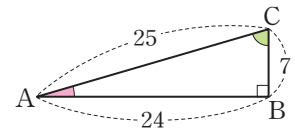
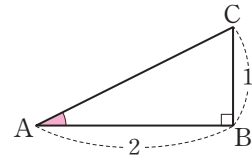
오른쪽 직각삼각형 ABC에서

(1) ∠A의 삼각비의 값은

$$\sin A=\frac{5}{13},\ \cos A=\frac{12}{13},\ \tan A=\frac{5}{12}$$

(2) ∠C의 삼각비의 값은

$$\sin C=\frac{\square}{13},\ \cos C=\frac{\square}{13},\ \tan C=\frac{\square}{\square}$$

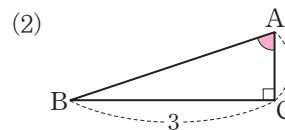
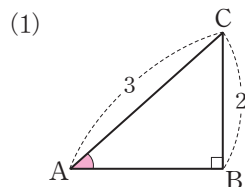
빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

문제 01 오른쪽 직각삼각형 ABC에서 ∠A와 ∠C의 삼각비의 값을 각각 구하시오.

예제 1 오른쪽 직각삼각형 ABC에서 ∠A의 삼각비의 값을 구하시오.

풀이 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{CA}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

따라서 $\sin A=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos A=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan A=\frac{1}{2}$이다.

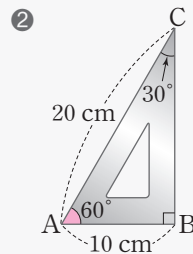
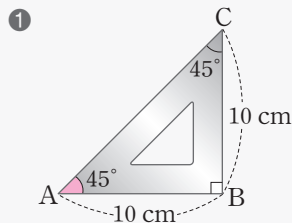
답 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan A=\frac{1}{2}$

문제 02 다음 직각삼각형 ABC에서 ∠A의 삼각비의 값을 구하시오.

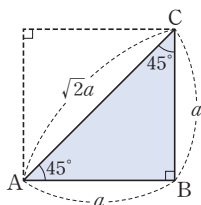
(1)

(2)

◆ 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값은 무엇일까?

개 념 열 기

다음 그림과 같이 두 예각의 크기가 모두 45°인 직각삼각형 모양의 삼각자 ❶과 두 예각의 크기가 각각 30°, 60°인 직각삼각형 모양의 삼각자 ❷가 있다.

❶
❷
1 삼각자 ❶에서 $\overline{CA}:\overline{AB}:\overline{BC}$와 ∠A의 삼각비의 값을 각각 구하시오.

2 삼각자 ❷에서 $\overline{CA}:\overline{AB}:\overline{BC}$와 ∠A의 삼각비의 값을 각각 구하시오.

두 수뿐만 아니라 세 수, 네 수의 비를 기호 ':'을 사용하여 비로 나타낼 수 있다.

$\overline{CA}:\overline{AB}:\overline{BC}$
$=\sqrt{2}a:a:a$
$=\sqrt{2}:1:1$

위의 개념 열기 **1**에서 피타고라스 정리에 의하여

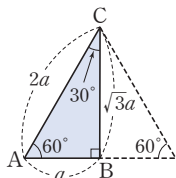
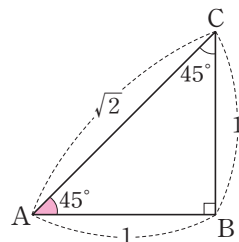
$$\overline{CA}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{10^2+10^2}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}(\text{cm})$$

이고, $\overline{CA}:\overline{AB}:\overline{BC}=\sqrt{2}:1:1$이다.

따라서 45°의 삼각비의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45°=\frac{1}{1}=1$$

$\overline{CA}:\overline{AB}:\overline{BC}$
$=2a:a:\sqrt{3}a$
$=2:1:\sqrt{3}$

또 개념 열기 **2**에서 피타고라스 정리에 의하여

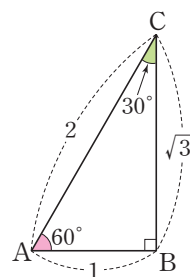
$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{20^2-10^2}=\sqrt{300}=10\sqrt{3}(\text{cm})$$

이고, $\overline{CA}:\overline{AB}:\overline{BC}=2:1:\sqrt{3}$이다.

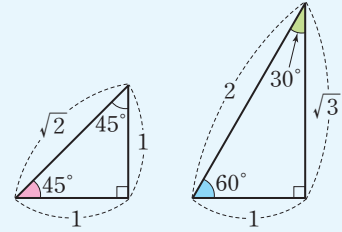
따라서 60°와 30°의 삼각비의 값을 각각 구하면 다음과 같다.

$$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin 30°=\frac{1}{2}$$

$$\cos 60°=\frac{1}{2} \qquad \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 60°=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3} \qquad \tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

30°, 45°, 60°의 삼각비의 값

삼각비 \ A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

예제 2

다음을 계산하시오.

(1) $\sin 30° + \cos 60°$　　　(2) $\tan 45° \times \sin 60°$

(1) $\sin 30° + \cos 60° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

(2) $\tan 45° \times \sin 60° = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

다음을 계산하시오.

(1) $\cos 30° + \tan 60°$

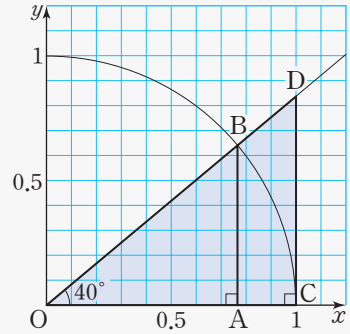
(2) $\sin 30° - \tan 45°$

(3) $2 \cos 60° \times \sin 45°$

(4) $3 \cos 30° \div \tan 30°$

예각에 대한 삼각비의 값은 무엇일까?

개 념 열 기

오른쪽 그림은 좌표평면 위의 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 사분원에 $\angle BOC=40^{\circ}$가 되도록 $\overrightarrow{OB}$를 그린 것이다. 이때 사분원 위의 점 B에서 $\overline{OC}$에 내린 수선의 발을 A라 하고, 점 C를 지나면서 $\overline{OC}$에 수직인 직선과 $\overrightarrow{OB}$가 만나는 점을 D라고 하자.

1 $\overline{OB}=1$임을 이용하여 $\triangle OAB$의 세 변의 길이 중에서 $\sin 40^{\circ}$, $\cos 40^{\circ}$의 값과 같은 것을 각각 말하시오.

2 $\overline{OC}=1$임을 이용하여 $\triangle OCD$의 세 변의 길이 중에서 $\tan 40^{\circ}$의 값과 같은 것을 말하시오.

위의 개념 열기 1에서 $\overline{OB}=1$이므로 직각삼각형 OAB에서

$$\sin 40^{\circ}=\frac{\overline{BA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{BA}}{1}=\overline{BA}$$

$$\cos 40^{\circ}=\frac{\overline{OA}}{\overline{BO}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}$$

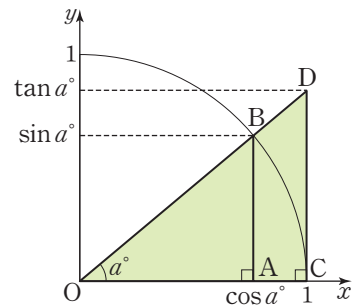
임을 알 수 있다.

또 개념 열기 2에서 $\overline{OC}=1$이므로 직각삼각형 OCD에서

$$\tan 40^{\circ}=\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{CD}}{1}=\overline{CD}$$

임을 알 수 있다.

일반적으로 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원에서 $\angle BOC=a^{\circ}$일 때, a°의 삼각비는

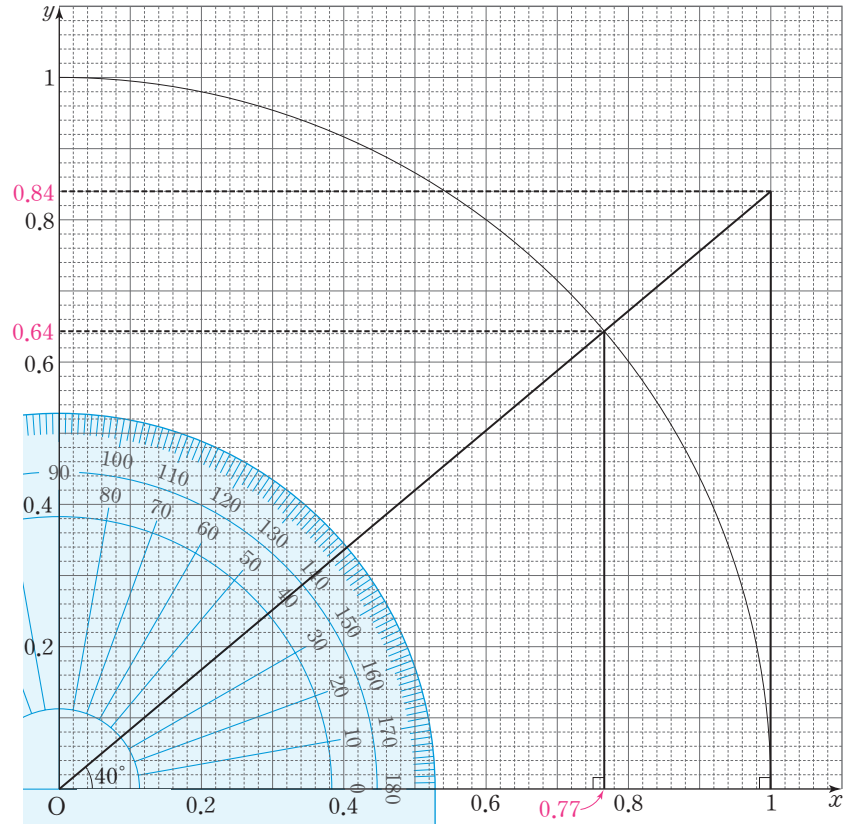
$$\sin a^{\circ}=\overline{AB}$$
$$\cos a^{\circ}=\overline{OA}$$
$$\tan a^{\circ}=\overline{CD}$$

이다.

따라서 예각에 대한 삼각비의 값은 반지름의 길이가 1인 사분원과 모눈의 눈금을 이용하여 구할 수 있다.

예를 들어 다음 그림에서 40°의 삼각비의 값을 모눈의 눈금을 읽어 구하면

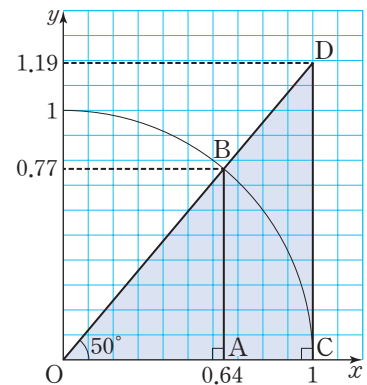
$$\sin 40^\circ = 0.64, \quad \cos 40^\circ = 0.77, \quad \tan 40^\circ = 0.84$$

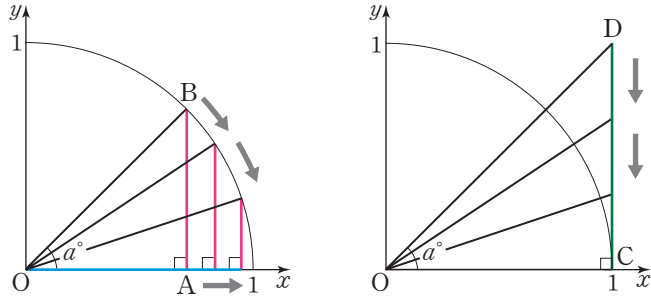
이다.

모눈의 눈금을 읽어 구한 세 값 0.64, 0.77, 0.84는 어림한 값이다.

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원에서 다음 삼각비의 값을 구하시오.

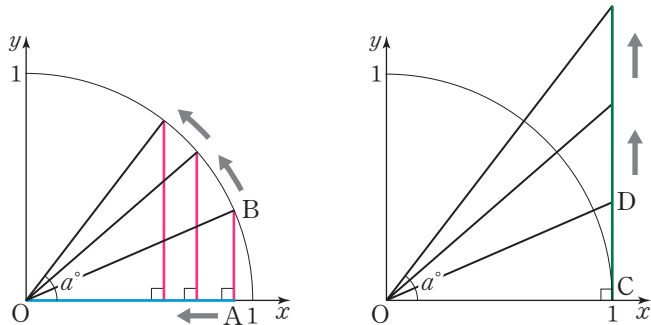
(1) $\sin 50^\circ$

(2) $\cos 50^\circ$

(3) $\tan 50^\circ$

0°와 90°의 삼각비의 값은 어떻게 정할 수 있는지 알아보자.

다음 그림에서 $\angle BOA=\angle DOC=a^\circ$일 때, $\sin a^\circ=\overline{AB}$, $\cos a^\circ=\overline{OA}$, $\tan a^\circ=\overline{CD}$이므로 a°의 크기가 0°에 가까워지면 $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$는 0에 가까워지고, $\overline{OA}$는 1에 가까워진다.

따라서 0°의 삼각비의 값은 다음과 같이 정한다.

$$\sin 0^\circ=0,\quad \cos 0^\circ=1,\quad \tan 0^\circ=0$$

한편 a°의 크기가 90°에 가까워지면 $\overline{AB}$는 1에 가까워지고, $\overline{OA}$는 0에 가까워진다.

따라서 90°의 사인, 코사인의 값은 다음과 같이 정한다.

$$\sin 90^\circ=1,\quad \cos 90^\circ=0$$

그러나 a°의 크기가 90°에 가까워지면 $\overline{CD}$는 한없이 길어지므로 $\tan 90^\circ$의 값은 정할 수 없다.

문제 05 다음을 계산하시오.

(1) $\sin 90^\circ+\cos 90^\circ-\tan 0^\circ$

(2) $\sin 0^\circ\times\cos 0^\circ$

임의의 예각에 대한 삼각비의 값은 삼각비의 표를 이용하여 구할 수 있다. 다음은 이 책의 282쪽에 실려 있는 삼각비의 표의 일부이다.

각도	사인(sin)	코사인(cos)	탄젠트(tan)
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
⋮	⋮	⋮	⋮
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
⋮	⋮	⋮	⋮

예를 들어 $\sin 20^\circ$의 값은 위의 표에서 20°의 가로줄과 sin의 세로줄이 만나는 칸에 적혀 있는 수를 읽으면 된다. 즉,

$$\sin 20^\circ = 0.3420$$

이다.

같은 방법으로 $\cos 20^\circ$, $\tan 20^\circ$의 값을 각각 구하면

$$\cos 20^\circ = 0.9397, \quad \tan 20^\circ = 0.3640$$

이다.

삼각비의 표에 있는 값은 대부분 반올림하여 소수 넷째 자리까지 구한 값이지만 등호 =를 사용하여 나타내기도 한다.

삼각비의 표를 이용하여 다음 값을 구하시오.

(1) $\sin 17^\circ$　　(2) $\cos 65^\circ$　　(3) $\tan 80^\circ$

추론

추론할 때는

✔ 관찰과 추측으로 수학적 사실을 이끌어 낸다.

다음은 ∠A의 크기가 예각일 때, 삼각비의 값에 대한 세 학생의 대화이다. 삼각비의 표를 이용하여 대화 중에서 각각 틀린 부분을 찾아 바르게 고치시오.

준우: $\sin A$의 값은 ∠A의 크기가 작아질수록 점점 커져.

윤아: $\cos A$의 값은 ∠A의 크기가 커질수록 점점 커지게 돼.

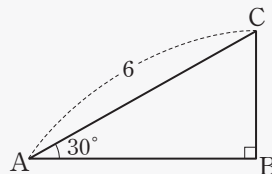
소윤: 삼각비의 값은 0과 1 사이에 있어.

삼각비의 활용

• 삼각비를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

삼각비를 이용하여 높이, 거리를 어떻게 구할까?

개 념 열 기

오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서 $\angle A=30^\circ$, $\overline{AC}=6$일 때, $\overline{CB}$와 $\overline{AB}$의 길이를 $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$를 이용하여 각각 나타내고, 그 길이를 구하시오.

히파르코스
(Hipparchos, B.C. 190?~B.C. 125?)
고대 그리스의 천문학자이자 수학자. 천문학에 필요한 삼각법을 연구하였다.

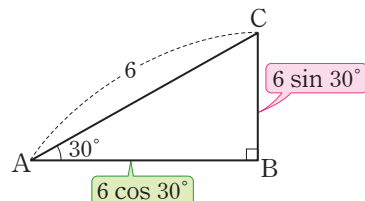
위의 개념 열기에서 $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$는 각각

$$\sin 30^\circ=\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{CB}}{6}$$

$$\cos 30^\circ=\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{AB}}{6}$$

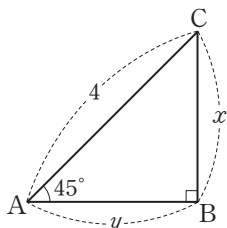
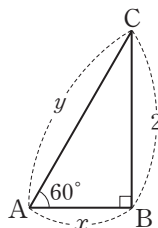
이므로 $\overline{CB}$, $\overline{AB}$의 길이는 각각

$$\overline{CB}=6\sin 30^\circ=6\times\frac{1}{2}=3$$

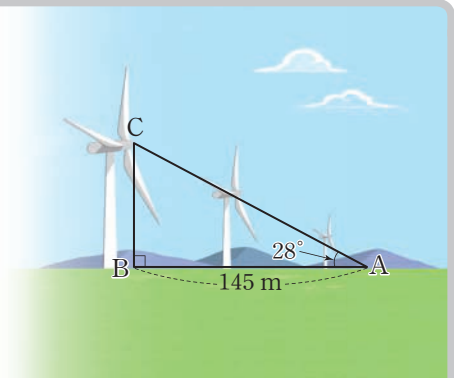
$$\overline{AB}=6\cos 30^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

이다.

이와 같이 직각삼각형에서 한 예각의 크기와 한 변의 길이를 알면 삼각비를 이용하여 나머지 두 변의 길이를 구할 수 있다.

문제 01 다음 직각삼각형 ABC에서 삼각비를 이용하여 x, y의 값을 각각 구하시오.

(1)

(2)

우리 생활 주변에서 직접 측정하기 어려운 높이나 거리 등은 삼각비를 이용하여 구할 수 있다.

오른쪽 그림과 같이 지면 위의 한 지점 A에서 풍력 발전기의 날개 회전축의 중심 C를 올려본각의 크기가 28°이다. 날개 회전축의 중심 C의 아래 끝 지점 B와 지점 A 사이의 거리가 145 m일 때, 지상으로부터 날개 회전축의 중심까지의 높이 $\overline{BC}$를 구하시오.

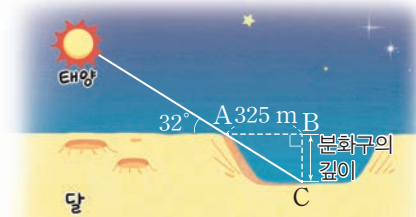
(단, 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한다.)

직각삼각형 ABC에서 $\tan 28^\circ = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$이므로

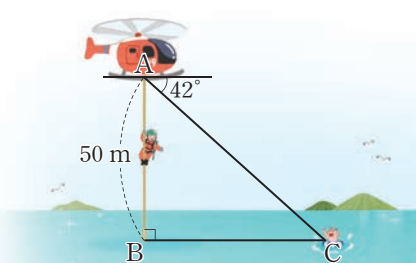
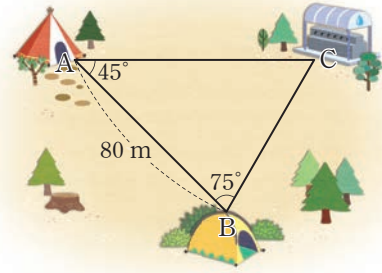
$\overline{BC} = \overline{AB} \tan 28^\circ = 145 \times 0.5317 = 77.0965(\mathrm{m})$

따라서 지상으로부터 날개 회전축의 중심까지의 높이를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하여 구하면 77 m이다.

답 77 m

오른쪽 그림과 같이 태양이 달의 분화구의 한 지점 A를 32°로 비출 때 생기는 그림자의 끝 지점이 C이고, $\overline{AB} = 325$ m이다. 이때 달의 분화구의 깊이 $\overline{BC}$를 구하시오.

(단, 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한다.)

헬기를 이용한 수상 인명 구조 훈련을 한다고 한다. 오른쪽 그림과 같이 구조 헬기 A에서 물에 빠진 사람 C를 내려본각의 크기가 42°이다. 구조 요원이 수면으로부터 50 m 위의 위치에서 내려와 수면 위의 한 지점 B에 내렸을 때, 지점 B와 사람 C 사이의 거리를 구하시오.

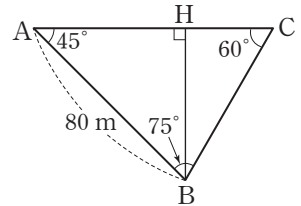
(단, 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한다.)

오른쪽 그림과 같은 어느 캠핑장에서 두 텐트 A, B 사이의 거리는 80 m이다. $\angle A=45^\circ$, $\angle B=75^\circ$일 때, 텐트 B에서 공동 식수대 C까지의 거리를 구하시오.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

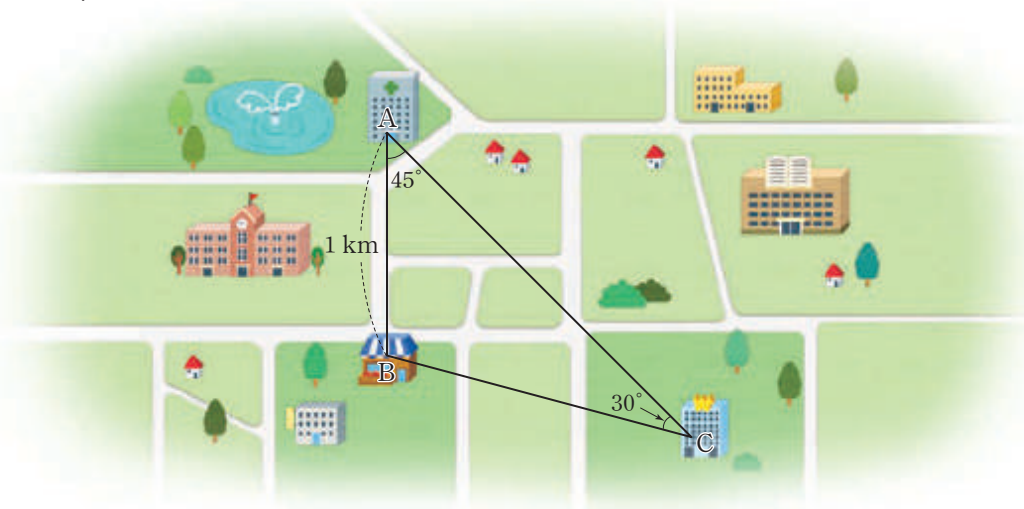
이때 직각삼각형 ABH에서 $\sin 45^\circ=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{AB}}$이므로

$$\overline{BH}=\overline{AB}\sin 45^\circ=80\times\frac{\sqrt{2}}{2}=40\sqrt{2}(\text{m})$$

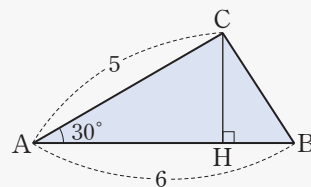
또 $\angle C=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$이고, 직각삼각형 BCH에서 $\sin 60^\circ=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{CB}}$이므로

$$\overline{CB}=\frac{\overline{BH}}{\sin 60^\circ}=40\sqrt{2}\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{80\sqrt{6}}{3}(\text{m})$$

따라서 텐트 B에서 공동 식수대 C까지의 거리는 $\dfrac{80\sqrt{6}}{3}$ m이다.

답 $\dfrac{80\sqrt{6}}{3}$ m

다음 그림과 같이 세 지점 A, B, C를 각각 직선으로 연결하는 지하 배수 터널을 건설하려고 한다. $\overline{AB}=1$ km, $\angle A=45^\circ$, $\angle C=30^\circ$일 때, 두 지점 A, C 사이의 거리를 구하시오.

삼각비를 이용하여 삼각형의 넓이를 어떻게 구할까?

개 념 열 기

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}=5$, $\overline{AB}=6$, $\angle A=30^\circ$인 $\triangle ABC$의 꼭짓점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

1 $\overline{CH}$의 길이를 30°에 대한 삼각비를 이용하여 나타내시오.

2 $\triangle ABC$의 넓이를 30°에 대한 삼각비를 이용하여 나타내시오.

삼각형에서 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 알면 삼각비를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

$\triangle ABC$에서 두 변의 길이를 각각 b, c라 하고 그 끼인각을 $\angle A$라고 할 때, $\triangle ABC$의 넓이를 구하면 다음과 같다.

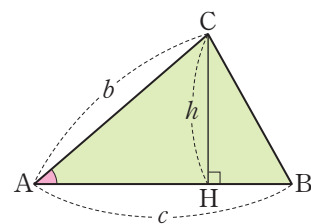
❶ $\angle A$가 예각인 경우

오른쪽 그림의 꼭짓점 C에서 변 AB에 내린 수선의 길이를 h라고 하면 $\sin A=\dfrac{h}{b}$이므로

$$h=b\sin A$$

이다.

따라서 $\triangle ABC$의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}bc\sin A$$

❷ $\angle A$가 둔각인 경우

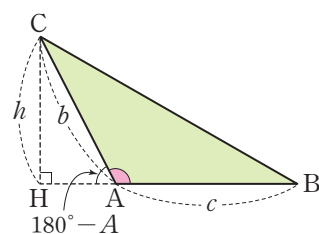
오른쪽 그림의 꼭짓점 C에서 변 BA의 연장선 위에 내린 수선의 길이를 h라고 하면

$\triangle AHC$에서 $\sin(180^\circ-A)=\dfrac{h}{b}$이므로

$$h=b\sin(180^\circ-A)$$

이다.

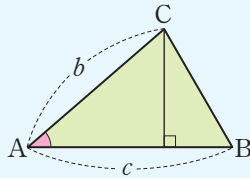
따라서 $\triangle ABC$의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}bc\sin(180^\circ-A)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

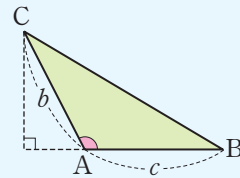
> ∠A가 직각일 때, 즉 $\angle A=90^\circ$일 때 $\sin 90^\circ=1$이므로
> $$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sin 90^\circ=\frac{1}{2}bc$$

삼각형의 넓이

△ABC에서 두 변의 길이 b, c와 그 끼인각 ∠A의 크기를 알 때, 삼각형의 넓이 S는 다음과 같다.

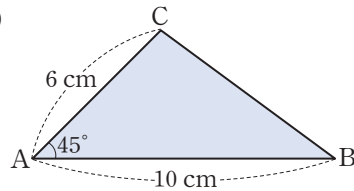
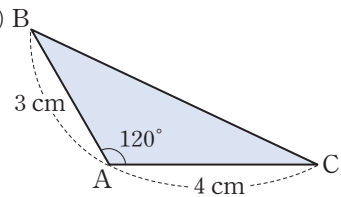
❶ ∠A가 예각일 때

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

❷ ∠A가 둔각일 때

$$S=\frac{1}{2}bc\sin(180^\circ-A)$$

예제 3

다음 △ABC의 넓이를 구하시오.

(1)

(2)

풀이 (1) ∠A는 예각이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times10\times\sin 45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times6\times10\times\frac{\sqrt{2}}{2}=15\sqrt{2}(\text{cm}^2)$$

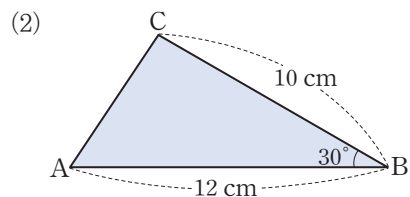
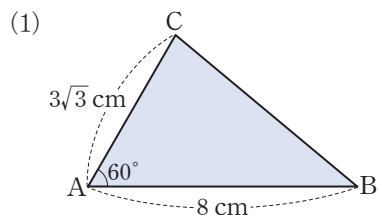
(2) ∠A는 둔각이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin(180^\circ-120^\circ)$$
$$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

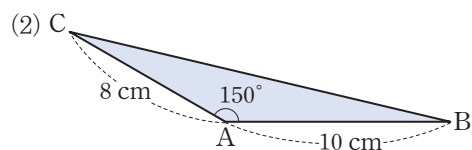
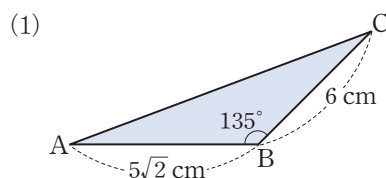
답 (1) $15\sqrt{2}\text{ cm}^2$ (2) $3\sqrt{3}\text{ cm}^2$

문제 05 다음 △ABC의 넓이를 구하시오.

(1)

(2)

문제 06 다음 △ABC의 넓이를 구하시오.

(1)

(2)

추론 | 문제 해결

추론하고 문제를 해결할 때는

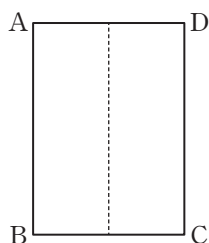
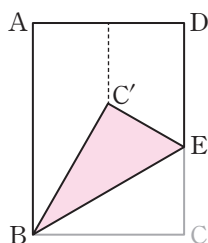
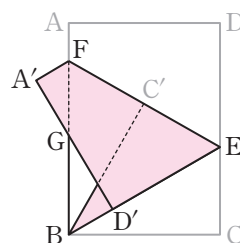
✔ 관찰과 추측으로 수학적 사실을 이끌어 낸다.

✔ 문제의 조건과 정보를 파악하고 풀이 전략을 생각한다.

다음 순서에 따라 A4 종이를 접어 삼각형을 만들어 보자.

〈그림 1〉

〈그림 2〉

〈그림 3〉

❶ A4 종이를 〈그림 1〉과 같이 반으로 접었다가 편다.

❷ 꼭짓점 C가 ❶에서 접은 선 위에 오도록 〈그림 2〉와 같이 접는다.

❸ $\overline{DE}$가 $\overline{BE}$ 위에 오도록 〈그림 3〉과 같이 접은 후, △A′GF를 뒤쪽으로 접어 △BEF를 완성한다.

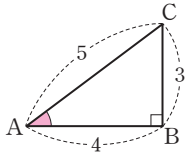
1 △BEF는 어떤 삼각형인지 추측하고, 그 이유를 설명하시오.

2 $\overline{BC}$의 길이가 21 cm일 때, △BEF의 넓이를 구하시오.

중단원 학습 점검

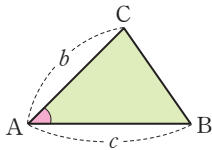
정답 및 해설 ▸ 259쪽

개념 정리

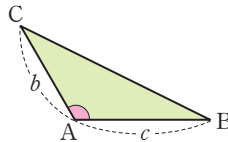
● 삼각비

$\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos A=\frac{4}{5}$, $\tan A=\frac{3}{4}$

↖ ∠A의 사인 ↖ ∠A의 코사인 ↖ ∠A의 탄젠트

● $0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$의 삼각비의 값

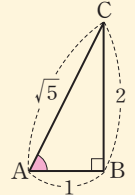
삼각비 \ A	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

● 예각삼각형의 넓이

$\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A$

● 둔각삼각형의 넓이

$\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin(180°-A)$

O, X 문제

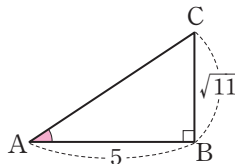
다음 문장이 옳으면 O, 옳지 않으면 X를 ( ) 안에 쓰시오.

1 오른쪽 직각삼각형 ABC에서 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$이다. ( )

2 $\sin 60°+\tan 30°$를 계산하면 $\frac{5\sqrt{3}}{6}$이다. ( )

3 $\sin 0°+\cos 90°$를 계산하면 1이다. ( )

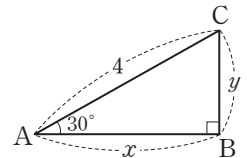
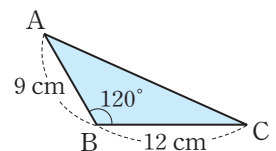
4 삼각형의 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 알면 삼각형의 넓이를 구할 수 있다. ( )

기초 문제

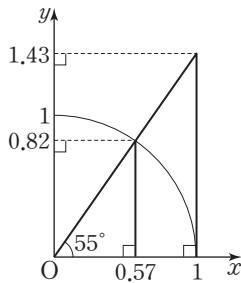
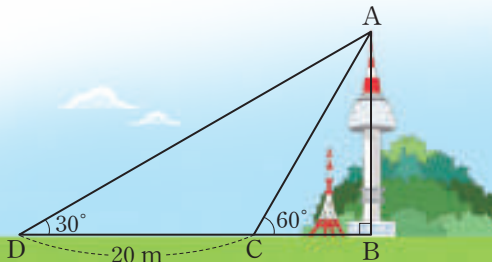
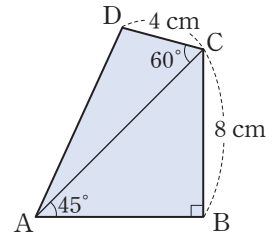
1 오른쪽 직각삼각형 ABC에서 ∠A의 삼각비의 값을 구하시오.

2 다음을 계산하시오.

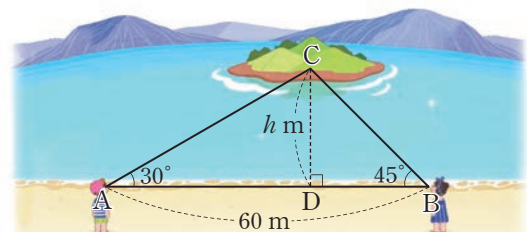
(1) $\sin 30°+\cos 30°\times\tan 60°$

(2) $\tan 45°\div\sin 90°+\cos 60°$

3 오른쪽 직각삼각형 ABC에서 x, y의 값을 각각 구하시오.

4 오른쪽 △ABC의 넓이를 구하시오.

기본 문제

5 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\tan A=2$일 때, $\cos A$의 값을 구하시오.

6 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원을 이용하여 $(\sin 55^\circ-\cos 55^\circ)\times\tan 55^\circ$의 값을 구하시오.
(단, 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림한다.)

7 다음 그림과 같이 20 m 떨어진 지점 C와 지점 D에서 타워의 꼭대기 지점 A를 올려본 각의 크기가 각각 60°, 30°일 때, 타워의 높이 $\overline{AB}$를 구하시오.

8 오른쪽 □ABCD의 넓이를 구하시오.

도전 문제

9 다음 그림과 같이 60 m 떨어져 있는 두 사람 A, B가 호수 중앙에 있는 섬 C를 바라본 각의 크기가 각각 30°, 45°일 때, h의 값을 구하시오.

10 한 변의 길이가 10 cm인 정삼각형 모양의 종이 깃발이 있다. 이 깃발에서 모양을 바꾸어 새로운 깃발을 만들려고 한다. 다음 두 경우 중에서 어느 경우에 더 많은 종이가 필요한지 삼각형의 넓이를 이용하여 판단하시오.

스스로 푸는 자기 주도 학습 수학 익힘책 ▶ 236~237쪽

수행 과제 이야기 속에서 높이를 구해 볼까?

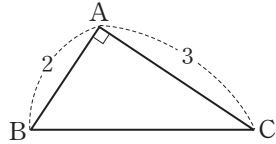
활동 목표 이야기 속의 문제를 삼각비를 이용하여 해결할 수 있다.

1 다음은 프랭클린(Franklin, B., 1706~1790)이 번개가 전기임을 알아낸 실험의 일화를 이용하여 만든 이야기이다. 글을 읽고, 연줄이 직선일 때 연이 떠 있는 높이를 구해 보자.

> 프랭클린은 천둥 번개가 치고 비가 오던 날, 위험을 무릅쓰고 연을 날렸다. 자칫 번개가 연에 떨어지면 그 연을 잡고 있는 프랭클린이 목숨을 잃을 수도 있는 위험한 실험이었다. 하지만 프랭클린은 연에 번개가 떨어지자 연줄을 타고 내린 전기에 손이 감전되면서도 기뻐서 펄쩍 뛰었다.
> "역시 내 생각대로 번개는 전기였어!"

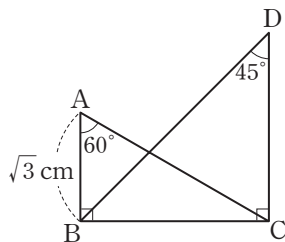
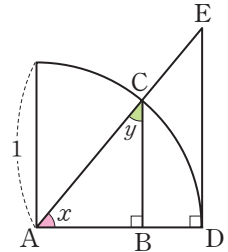
2 이야기나 문학 작품 등을 이용하여 삼각비에 대한 문제를 만들고, 그 문제를 해결해 보자.

대단원 학습 평가

1 ●○○
오른쪽 직각삼각형 ABC에 대하여 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① $\sin B=\frac{3\sqrt{13}}{13}$ ② $\cos B=\frac{2\sqrt{13}}{13}$
③ $\sin C=\frac{2\sqrt{13}}{13}$ ④ $\cos C=\frac{3\sqrt{13}}{13}$
⑤ $\tan C=\frac{3}{2}$

2 ●○○
$(1+\cos 30^\circ)(1-\cos 30^\circ)$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

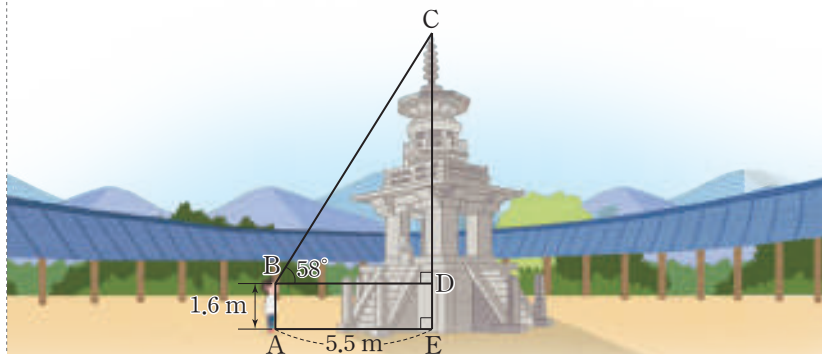
3 ●●○
다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC와 BCD에서 $\overline{BD}$의 길이를 구하시오.

4 ●●○
오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원에 대하여 다음 보기 중에서 옳은 것을 모두 찾으면?

• 보기 •

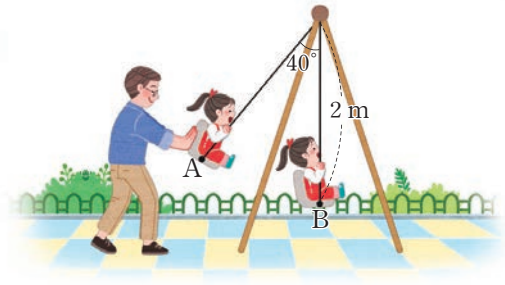
ㄱ. $\sin x=\overline{BC}$ ㄴ. $\tan x=\overline{DE}$
ㄷ. $\sin y=\overline{AC}$ ㄹ. $\cos y=\overline{BC}$

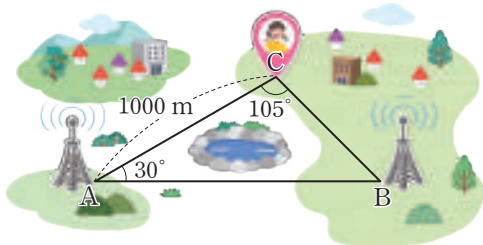
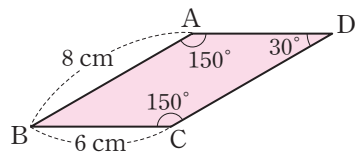
① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

5 ●●○
다음 그림과 같이 세민이가 다보탑의 중심축과 5.5 m 떨어진 지점 A에서 다보탑의 끝 지점 C를 올려본각의 크기가 58°이다. 세민이의 눈높이가 1.6 m일 때, 다보탑의 높이 $\overline{CE}$를 구하시오.
(단, 소수점 아래 둘째 자리에서 반올림한다.)

정답 및 해설 ▸ 260쪽

●●○

6 다음 그림과 같이 줄의 길이가 2 m인 그네가 앞뒤로 40°씩 흔들렸을 때, 지점 A는 가장 낮은 지점 B보다 몇 m 더 높은지 구하시오. (단, 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림한다.)

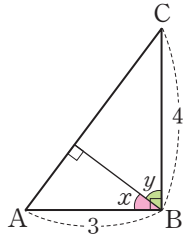
●●●

7 지연이와 두 기지국 A, B는 다음 그림과 같이 위치해 있다. 지연이의 위치를 C라고 하면 $\overline{AC}=1000$ m, $\angle A=30°$, $\angle C=105°$일 때, 두 기지국 A, B 사이의 거리를 구하시오.

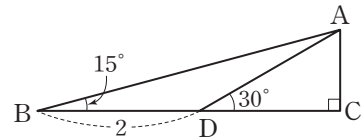
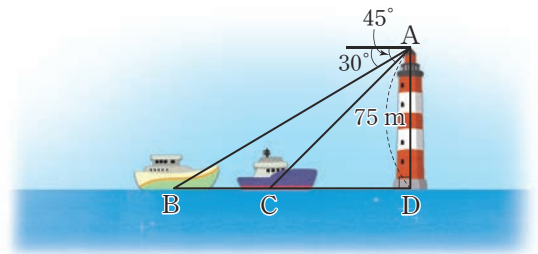
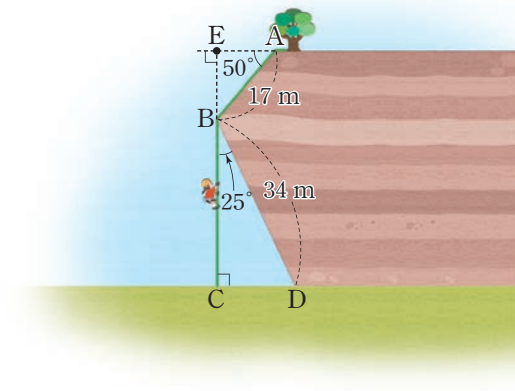
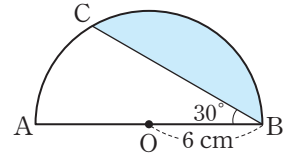
●●○

8 다음 □ABCD의 넓이를 구하시오.

서술형 문제

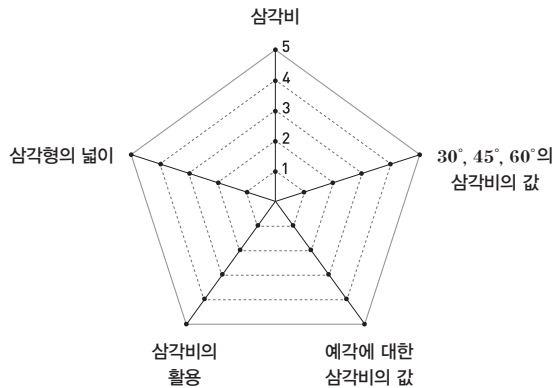
[9~13] 다음 문제의 풀이 과정을 자세히 쓰시오.

●●○

9 오른쪽 직각삼각형 ABC에서 $\sin x+\sin y$의 값을 구하시오.

●●○

10 다음 직각삼각형 ABC에서 $\tan 15°$의 값을 구하시오.

●●○

11 다음 그림과 같이 높이가 75 m인 등대의 꼭대기 지점 A에서 두 배 B, C를 내려본각의 크기가 각각 30°, 45°일 때, 두 배 B, C 사이의 거리를 구하시오.

12 다음 그림과 같이 암벽 위의 나무에 밧줄을 묶고 암벽을 타고 내려오고 있다. $\overline{AB}=17$ m, $\overline{BD}=34$ m, $\angle BEA=90^\circ$, $\angle BAE=50^\circ$, $\angle BCD=90^\circ$, $\angle CBD=25^\circ$일 때, 암벽의 높이 $\overline{EC}$를 구하시오.
(단, 소수점 아래 둘째 자리에서 반올림한다.)

13 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6 cm인 반원 O에서 $\angle ABC=30^\circ$일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하시오.

자기 평가

1 이 단원에서 학습한 내용에 대한 나의 성취 수준을 다음 그림에 점으로 표시하고, 이웃한 점을 선으로 연결해 보자.

| 성 취 수 준 |
1수준: 개념을 이해하기 어려웠다.
2수준: 문제를 해결하기 어려웠다.
3수준: 문제를 일부 해결하였다.
4수준: 문제를 대부분 해결하였다.
5수준: 문제를 모두 해결하였다.

이해가 부족한
내용은 본문을 복습!
문제가 더 필요하면
수학 익힘책 ▸ 236~237쪽

2 이 단원을 시작할 때 세운 학습 계획을 잘 실천하였는지 평가해 보고, 이해하기 어려웠던 내용을 적어 보자.

비행기 조종사

비행기 조종사가 하는 일은?

비행기 조종사는 비행기 운항은 물론 승객의 안전에 관한 모든 사항을 통제하고 책임진다. 비행 스케줄에 따라 항로, 목적지, 연료량, 기상 조건 등을 숙지하고 항공기 상태, 조종실 시스템 등을 점검한다. 비행하는 동안에는 항공 승무원의 활동을 지휘하며 비행 중 발생한 각종 설비상의 문제나 이상 현상을 보고한다.

비행기 조종에 수학이 이용되나요?

비행기를 조종할 때, 조종사는 비행기를 일정한 방향과 속력으로 움직이도록 해야 하므로 공간 지각력이 필요하다. 또 조종사는 비행기가 수평면과 정해진 고도를 유지하며 비행하는지 확인하고 점검하는데, 이때 삼각비를 활용한 여러 가지 항법 장치가 이용된다.

(참고 자료: 커리어넷, 2018)

창의 융합 프로젝트

수학 + 공학

경사계(클리노미터)는 기울기의 각도 등을 재는 기구이다.

경사계를 이용하면 어떤 물체를 올려다보거나 내려다보았을 때의 각의 크기를 잴 수 있다. 또 큰 나무나 고층 건물 등과 같이 직접 측정하기 힘든 높이를 삼각비를 이용하여 구할 수 있다.

경사계 제작 및 각도 측정 방법

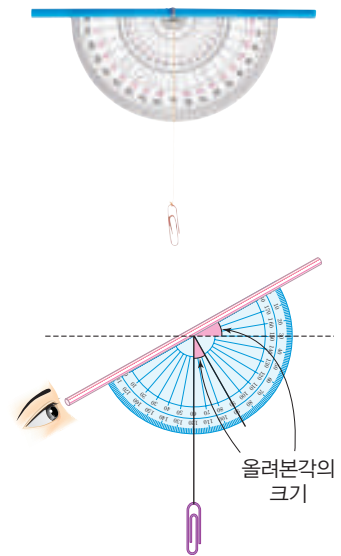
준비물: 각도기, 빨대, 클립(또는 지우개), 실, 가위, 투명 테이프

❶ 빨대를 각도기의 반원의 지름 위에 맞춰 투명 테이프로 양 끝을 붙여 고정한다.

❷ 실을 각도기의 중앙 부분 빨대에 묶고 투명 테이프로 고정한다.

❸ 추의 역할을 하도록 실의 한 쪽 끝에 클립(또는 지우개)을 매달아 경사계를 완성한다.

❹ 한 사람은 높이를 구하려는 사물의 꼭대기를 빨대의 구멍을 통해 바라보고, 다른 사람은 경사계의 실이 가리키는 각의 크기를 읽어 올려본각의 크기를 구한다. (예를 들어 오른쪽 그림에서 실이 가리키는 각의 크기를 읽으면 60°이므로 올려본각의 크기는 $90^\circ-60^\circ=30^\circ$이다.)

경사계를 이용하여 주변 사물의 높이를 측정해 보자.

활동지

경사계를 이용하여 주변 사물의 높이 구하기

■ 모둠명:

■ 모둠원:

1 다음 순서에 따라 경사계를 이용하여 학교 건물의 높이를 구해 보자.

❶ 측정자와 대상 사이의 거리

각의 크기를 측정할 지점에서부터 학교 건물까지의 거리를 잰다.

❷ 올려본각의 크기

경사계로 학교 건물의 꼭대기를 바라보고, 올려본각의 크기를 측정한다.

❸ 측정자의 눈높이

경사계로 학교 건물의 꼭대기를 바라본 학생의 눈높이를 잰다.

❹ 측정 대상의 높이

측정한 값과 삼각비를 이용하여 학교 건물의 높이를 구한다.

2 측정 대상을 정하여 다음 빈칸을 채워 주변 사물의 높이를 측정해 보자.

측정 대상	측정자와 대상 사이의 거리	올려본각의 크기	측정자의 눈높이	측정 대상의 높이

동료 평가	
	활동에 적극적으로 참여하였는가?
	친구의 의견을 잘 듣고 존중하였는가?
	활동 과정에서 다양하고 좋은 의견을 많이 냈는가?
	활동 과정에서 서로 협력하였는가?

스스로 푸는 자기 주도 학습

수학 익힘책

Ⅰ 실수와 그 연산 ······ 230

Ⅱ 인수분해와 이차방정식 ······ 232

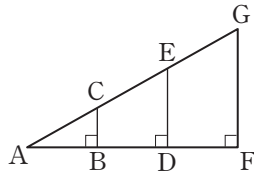
Ⅲ 이차함수 ······ 234

Ⅳ 삼각비 ······ 236

Ⅴ 원의 성질 ······ 238

Ⅵ 통계 ······ 240

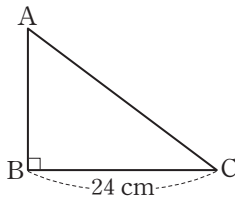
1 ●○○

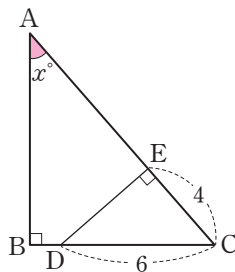
오른쪽 그림과 같이 ∠A의 크기가 같은 직각삼각형 ABC, ADE, AFG가 있다. 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① $\frac{\overline{ED}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{GF}}{\overline{AG}}$ ② $\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{EA}}$

③ $\sin A=\frac{\overline{ED}}{\overline{AE}}$ ④ $\cos A=\frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}$

⑤ $\tan A=\frac{\overline{FG}}{\overline{AF}}$

2 ●○○

오른쪽 직각삼각형 ABC에서 $\cos C=\frac{4}{5}$일 때, $\overline{AC}$의 길이를 구하시오.

3 ●●○

오른쪽 직각삼각형 ABC에서 변 BC 위의 한 점 D에서 변 AC에 내린 수선의 발을 E라고 하자. $\angle BAE=x°$일 때, $\cos x°$의 값을 구하시오.

4 ●●○

다음을 계산하시오.

(1) $2\sin 45°\times\tan 60°\div\cos 0°$

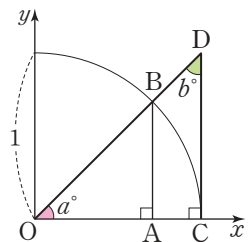
(2) $\frac{\sin 60°}{\cos 30°}-\frac{\tan 45°}{\sin 30°}$

(3) $\sin 90°\div\tan 30°-\tan 60°\times\cos 60°$

5 ●●○

삼각형의 세 내각의 크기의 비가 1 : 2 : 3이고, 세 각 중에서 가장 작은 각의 크기를 A라고 할 때, $\sin A\times\cos A\times\tan A$의 값을 구하시오.

6 ●●○

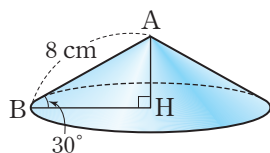
오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원을 좌표평면 위에 나타낼 때, 다음 중에서 점 B의 좌표를 나타내는 것은?

① $(\sin a°, \sin b°)$ ② $(\cos a°, \sin b°)$

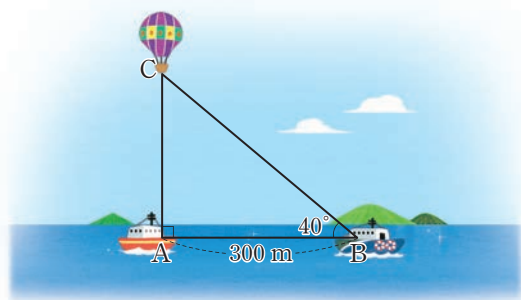
③ $(\cos a°, \tan a°)$ ④ $(\cos b°, \sin b°)$

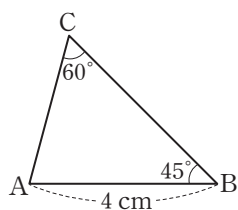
⑤ $(\sin b°, \cos b°)$

●●○

7 다음 그림과 같이 모선의 길이가 8 cm인 원뿔이 있다. 모선과 밑면이 이루는 각의 크기가 30°일 때, 이 원뿔의 부피를 구하시오.

●●○

8 다음 그림과 같이 바다를 항해하는 두 배 A, B 사이의 거리는 300 m이고, 배 A의 바로 위에 열기구 C가 떠 있다. 배 B에서 열기구 C를 올려본각의 크기가 40°일 때, 배 A와 열기구 C 사이의 거리를 구하시오.
(단, 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한다.)

●●●

9 오른쪽 △ABC에서 $\overline{AC}$의 길이를 구하시오.

●●●

10 다음 그림과 같이 이삿짐 사다리차를 이용하여 짐을 옮기고 있다. 건물로부터 10 m 떨어진 지점에서 사다리가 53°의 각도로 사람이 있는 지점 A까지 기대어 있다. 사다리 아래 끝 지점 B에서 건물 아래 끝 지점 C를 내려본각의 크기가 21°일 때, 사람이 있는 곳의 높이 $\overline{AC}$를 구하시오.
(단, 소수점 아래 둘째 자리에서 반올림한다.)

●●●

11 오른쪽 정육각형의 넓이를 구하시오.